

Analytické modely systémů hromadné obsluhy

- předmětem „teorie hromadné obsluhy“
 - Kendallova klasifikace - typ SHO: $X / Y / c / d / p$
 - X...typ stochastického procesu, který popisuje příchody
 - Y...typ stochastického procesu který popisuje délku obsluhy
 - c....počet kanálů obsluhy, d... délka fronty, p.... velikost populace
- nejjednodušší typ SHO: $M / M / 1 / \infty / \infty$ (často pouze $M / M / 1$)
- příchody požadavků do SHO - Poissonův proces
 - počet obslužených požadavků - Poissonův proces
 - počet kanálů obsluhy = 1

Poissonův proces – modelování výskytu nezávislých událostí

předpoklady:

- příchod požadavku v intervalu $dt \rightarrow 0$ nezávisí na příchodech požadavků v předcházejících intervalech,
- necht' pravděpodobnost příchodu jednoho požadavku v dt : $p = \lambda \cdot dt$,
- pravděpodobnost žádného příchodu v dt : $q = 1 - \lambda \cdot dt$,
- pro interval $T = m \cdot dt$:
 - pravděpodobnost příchodu k požadavků: $p(k) = \binom{m}{k} p^k q^{m-k}$
(binomické rozložení se střední hodnotou $m \cdot \lambda$)
 - pro $dt \rightarrow 0$, $T = \text{konst.}$ dostaneme pro pravděpodobnosti počtu příchodů **Poissonovo** rozložení:

$$p(k) = \frac{\lambda^k \cdot T^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot T} \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

Poissonův proces

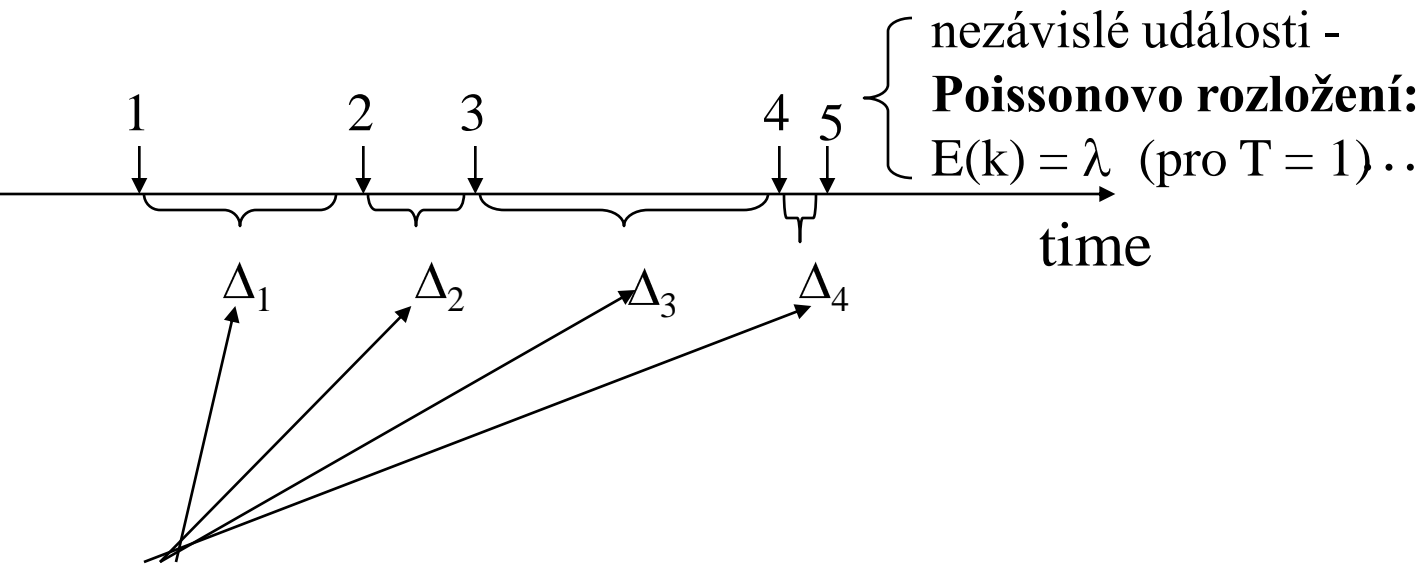
Poissonovo rozložení:

$$E(k) = \sum_0^{\infty} k \cdot p(k) = \lambda \cdot T \quad \dots \text{střední hodnota počtu událostí za dobu } T$$

$$\lambda = \frac{E(k)}{T} \quad \dots \text{průměrný počet událostí za jednotku času}$$

$$\sigma^2 = E[k - E(k)]^2 = \lambda \cdot T \quad \dots \text{rozptyl}$$

- úzký vztah k exponenciálnímu rozložení:



intervaly mezi příchody: spojitá náhodná veličina -

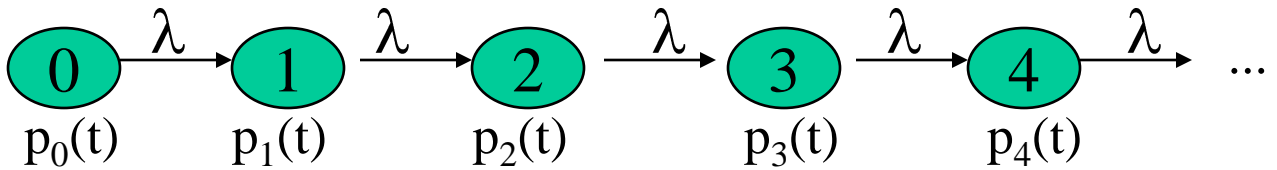
exponenciální rozložení se střední hodnotou $E(\Delta_i) = 1 / \lambda$

Poissonův proces a exponenciální rozložení

graf přechodů Poissonova procesu:

(speciální případ markovovského procesu)

stav iskutečnost indikující výskyt i událostí



označení: $p_i(t)$, resp. $p_i(t+dt)$pravděpodobnost, že v čase t , resp. $t+dt$ se proces nachází ve stavu i

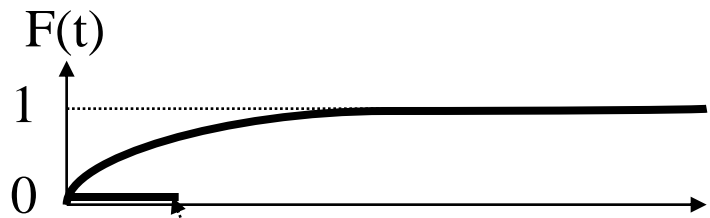
$$p_i(t+dt) = p_i(t) - p_i(t) \cdot \lambda dt \quad (\text{úbytek o pravděpod. přechodu})$$

$$p'_i(t) + \lambda \cdot p_i(t) = 0, \quad \text{pro } p_i(0) = 1 \Rightarrow$$

$$p_i(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{.....pravděpodobnost setrvání procesu ve stavu } i$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{....distribuční funkce exponenciálního rozložení}$$

$$p(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{.... hustota pravděpodobnosti (exp. rozložení)}$$

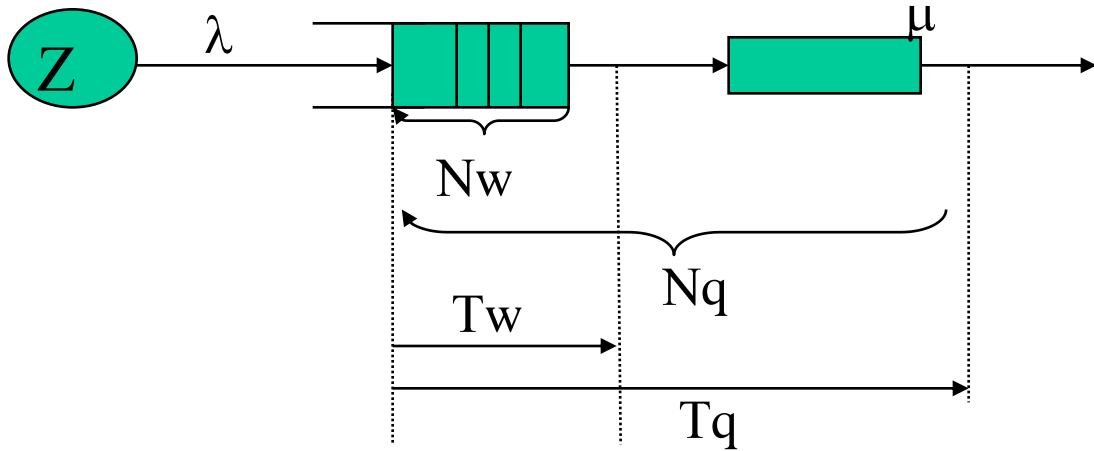


$$E(t) = \int_0^{\infty} t \cdot p(t) dt = 1/\lambda \quad \text{..střední hodnota exp. rozložení}$$

$$\sigma^2 = E[t - 1/\lambda]^2 = 1/\lambda^2 \quad \text{....rozptyl exponenciálního rozložení}$$

Analytický model systému M/M/1

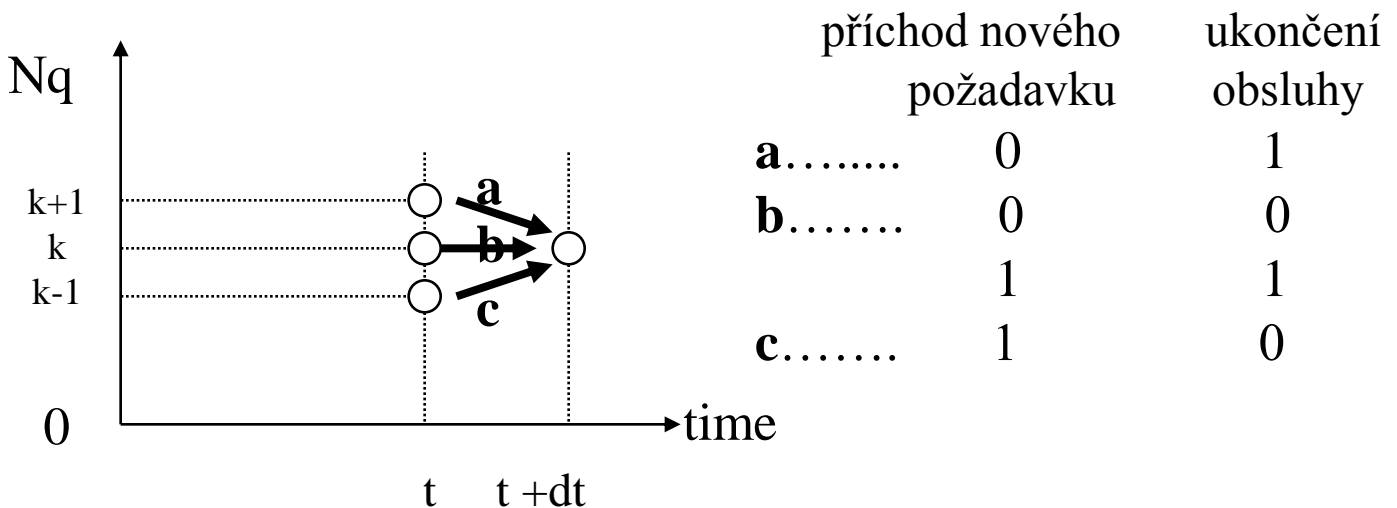
cíle analytického modelu:



Cíl: $E(N_q) = ?$, $D(N_q) = ?$, $E(T_q) = ?$, $D(T_q) = ?$,.....

- necht' $p_k(t) = P[N_q(t) = k]$, $k = 0, 1, \dots$
- předpoklad: λ, μ ..konstanty a $\lambda < \mu \Rightarrow \rho = \lambda / \mu < 1$
pak lze nalézt $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$

možné situace v SHO:



Analytický model systému M/M/1

pravděpodobnosti jednotlivých stavů v systému M/M/1:

$$p_k(t + dt) = p_k(t)[(1 - \lambda \cdot dt)(1 - \mu \cdot dt) + \mu \cdot dt \cdot \lambda \cdot dt] +$$

$$p_{k-1}(t)[\lambda \cdot dt(1 - \mu \cdot dt)] +$$

$$p_{k+1}(t)[\mu \cdot dt(1 - \lambda \cdot dt)]$$

pro zjednodušení vynecháme mocninu dt^2 :

$$p_k(t + dt) = [1 - (\lambda + \mu) \cdot dt] \cdot p_k(t) + \lambda \cdot dt \cdot p_{k-1}(t) + \mu \cdot dt \cdot p_{k+1}(t)$$

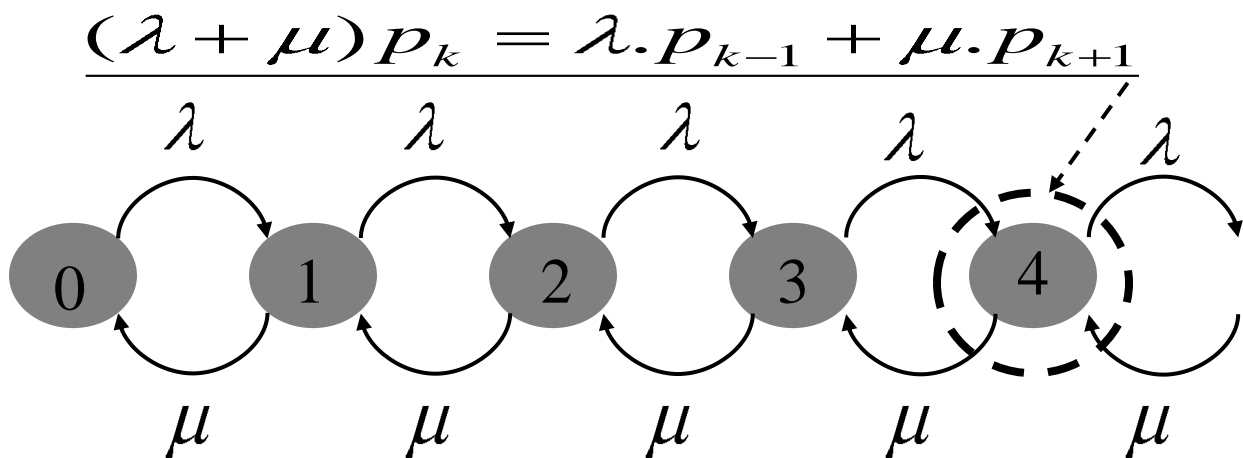
$$\frac{p_k(t + dt) - p_k(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot p_k(t) + \lambda \cdot p_{k-1}(t) + \mu \cdot p_{k+1}(t)$$

poznámka: hledáme ustálené hodnoty $p_k(t \rightarrow \infty)$

pokud $\lambda < \mu$, pak existuje $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) \Rightarrow \frac{dp_k(t)}{dt} = 0 \Rightarrow$

rovnice rovnováhy pro stacionární stav:

stavově přechodný diagram:



Analytický model systému M/M/1

určení p_k - z podmínky rovnováhy mezi stavy k a $k+1$:

$$\lambda \cdot p_k = \mu \cdot p_{k+1} \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho \cdot p_0$$

.....

$$p_k = \rho \cdot p_{k-1} = \rho^k p_0$$

$p_0 = ?$...rozlišíme 2 případy:

a) neomezená fronta: ($d = \infty$)

$$\sum_0^{\infty} p_k = p_0 + \rho \cdot p_0 + \rho^2 \cdot p_0 + \dots = \frac{p_0}{1 - \rho} = 1 \Rightarrow$$

$$p_0 = 1 - \rho, p_k = \underline{(1 - \rho) \cdot \rho^k}$$

Poznámky:

1) podmínka stabilního stavu: $\rho < 1$

2) pro $\rho = 1$ nestabilní stav $\Rightarrow p_0 = 1 - \rho = 0 = p_1 = p_2 \dots$

3) výstup obslužených požadavků tvoří opět Poissonův proces s parametrem λ' , $\lambda' = ?$; možné situace:

a) neprázdná fronta \Rightarrow odchod μ požadavků za jednotku času

b) prázdná fronta ($p_0 = 1 - \rho$) \Rightarrow žádný odchod

$$\lambda' = \mu \cdot (1 - p_0) + 0 \cdot p_0 = \mu(1 - (1 - \rho)) = \mu \cdot \rho = \mu \frac{\lambda}{\mu} = \lambda$$

Analytický model systému M/M/1

b) omezená fronta (d = n): $\sum_{k=0}^n p_k = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 \underbrace{(1 + \rho + \dots + \rho^n)}_1 + p_0 \rho^{n+1} \underbrace{(1 + \rho + \rho^2 + \dots)}_{\frac{p_0}{1-\rho} \rho^{n+1}} = \frac{p_0}{1-\rho}$$

$$\frac{p_0}{1-\rho} - \frac{p_0}{1-\rho} \rho^{n+1} = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}$$

Poznámky:

1) pravděpodobnost plné fronty: $p_n = p_0 \cdot \rho^n$

$$p_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \rho^n = p_b \quad \dots \text{pravděpodobnost blokování dalších požadavků}$$

pro

$$\mu \gg \lambda, \rho \ll 1: p_b = (1-\rho)\rho^n = p_n \quad \dots \text{viz. neomezená fronta}$$

2) výstupní proud: $\lambda' = \lambda (1-p_b)$...úbytek o odmítnuté požadavky

Příklad: $\rho = 0.5, n = ?$

- případ $p_b = 0.001$:

$$p_b = 0.001 \quad (1-\rho) \cdot \rho^n = (1-0.5) \cdot (0.5)^n = (0.5)^{n+1}$$

$$(1/2)^{10} \sim 0.001 \Rightarrow n+1 \sim 10 \Rightarrow n \sim 9$$

- případ $p_b = 10^{-6}$: $n \sim 19$

3) není třeba uvažovat podmínku $\rho < 1$; pro $\rho \geq 1$..oblast zahlcení

necht' $\rho \rightarrow \infty$, pak $p_0 = p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} \rightarrow 0, p_n \rightarrow 1$

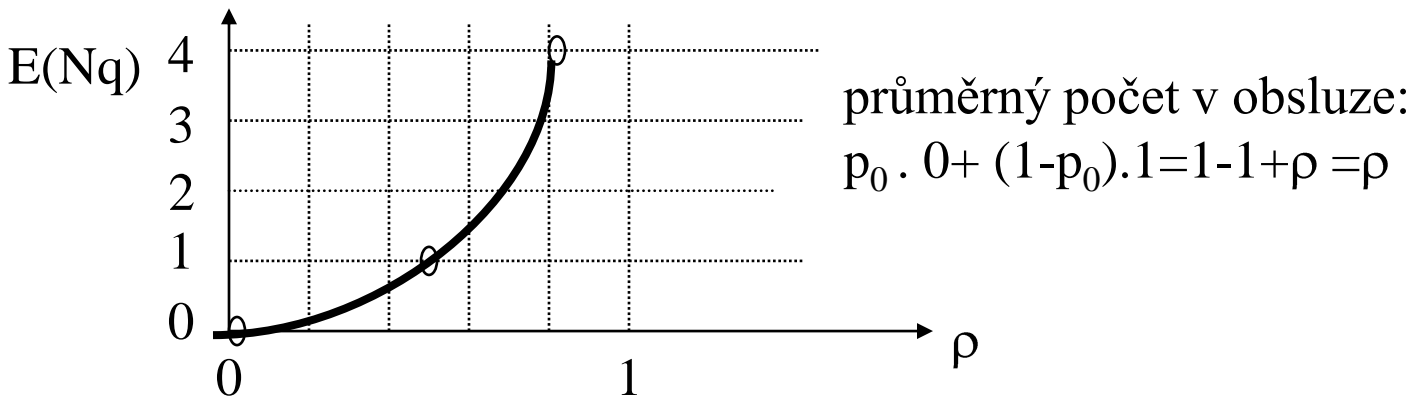
Analytický model systému M/M/1

příklad: M/M/1 s neomezenou délkou fronty

a) $E(Nq) = ?$ (průměrný počet požadavků v SHO)

$$E(Nq) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-\rho)\rho^k = (1-\rho) \cdot \rho \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^{k-1} =$$

$$= (1-\rho)\rho \cdot (1+2\rho+3\rho^2+\dots) = (1-\rho) \cdot \rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$



b) $E(Tq) = ?$ (průměrná doba setrvání požadavku v SHO)

- pozorujme požadavek, který strávil v SHO právě dobu $E(T_q)$ (průměrná doba setrvání požadavku P)
- za dobu $E(T_q)$ přijde do SHO v průměru právě $\lambda \cdot E(T_q)$ nových požadavků = $E(Nq)$,

$$\underline{\lambda \cdot E(Tq) = E(Nq)} \quad \dots \text{Littleův vzorec}$$

$$E(T_q) = \frac{E(Nq)}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\underline{\mu(1-\rho)}}$$

$$E(T_q) \cong 1/\mu \quad \text{pro } \rho \ll 1$$

Analytický model systému M/M/1

pokračování příkladu - další vztahy pro $E(N_w)$ a $E(T_w)$:

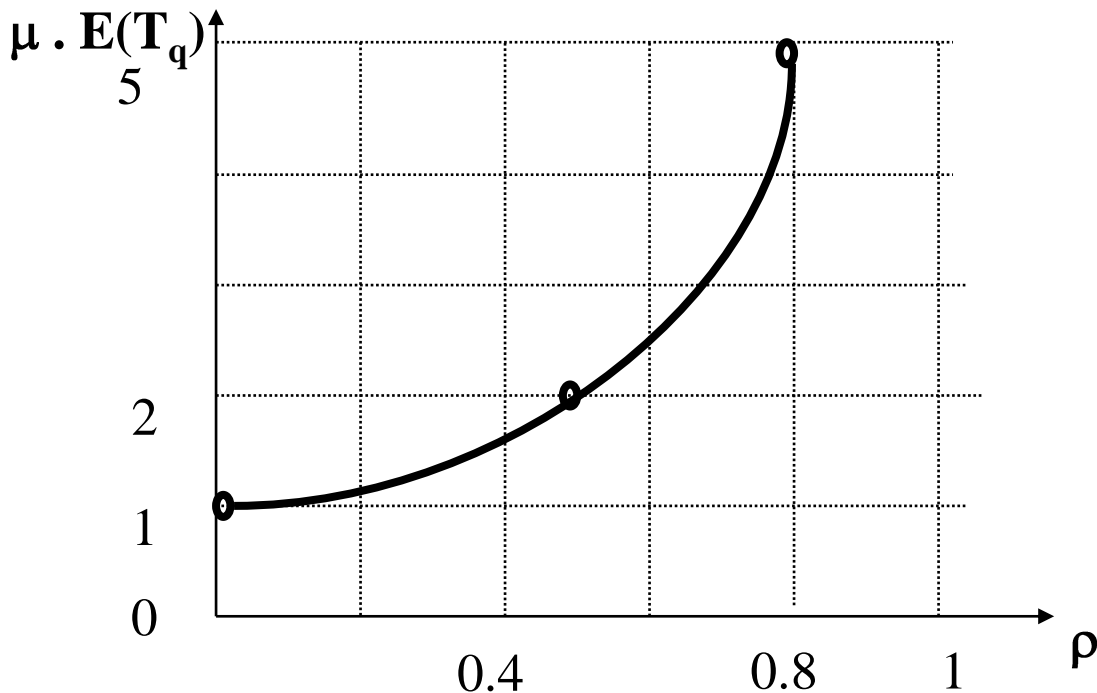
$$E(T_q) = E(T_w) + \frac{1}{\mu} \quad / \cdot \lambda \quad \dots \text{čekání} + \text{doba obsluhy}$$

$$\lambda \cdot E(T_q) = \lambda \cdot E(T_w) + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$E(N_q) = E(N_w) + \rho \quad \text{průměr. počet v SHO} = \text{průměr. počet požadavků čekajících na obsluhu} + \text{průměr. počet v obsluze}$$

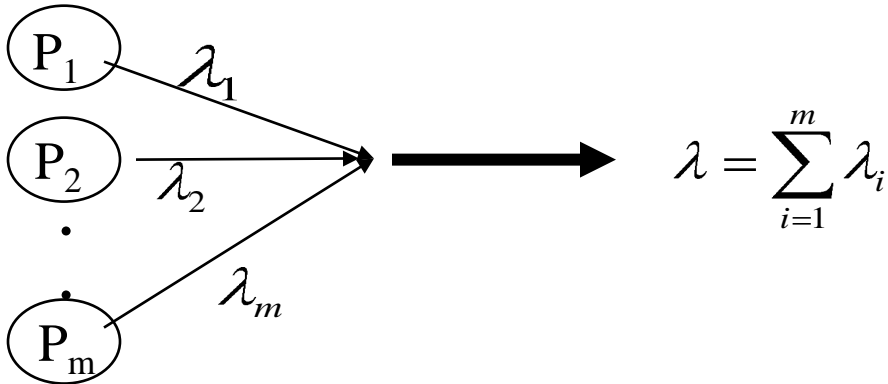
normalizované zpoždění: doba v SHO vztažená vůči době obsluhy:

$$\frac{E(T_q)}{\frac{1}{\mu}} = \mu \cdot E(T_q) = \frac{\mu}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1 - \rho}$$



Slučování Poissonových procesů

další vlastnost Poissonova procesu:



necht' $N(t, t + dt)$ počet událostí výsledného procesu
v intervalu $t, t + dt$:

pravděpodobnost žádné události výsledného procesu v intervalu $t, t + dt$:

$$P[N(t, t + dt) = 0] = \prod_1^m P[N_i(t, t + dt) = 0] =$$

$$\prod_{i=1}^m (1 - \lambda_i \cdot dt) = (1 - \lambda_1 \cdot dt)(1 - \lambda_2 \cdot dt) \dots (1 - \lambda_m \cdot dt) =$$

$$= 1 - \lambda_1 \cdot dt - \lambda_2 \cdot dt + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot dt^2 - \lambda_3 \cdot dt + \dots =$$

$$\cong 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m) \cdot dt = 1 - \lambda \cdot dt \dots \text{viz. definice}$$

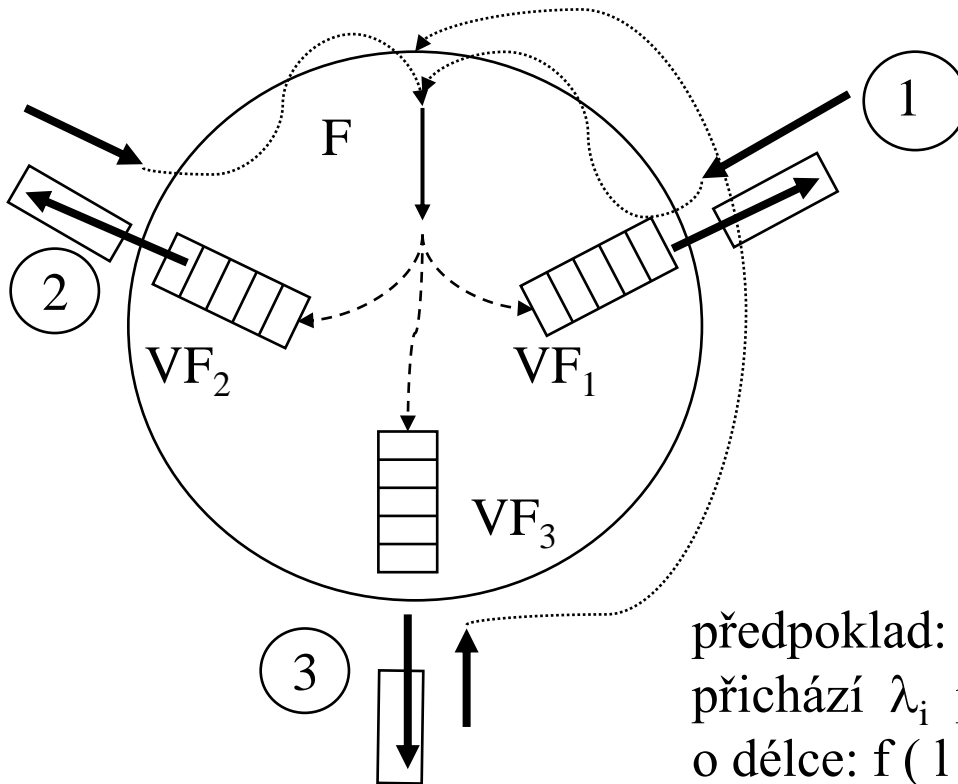
Poissonova procesu

závěr: sloučením více Poissonových procesů dostaneme opět

**Poissonův proces s parametrem λ , který je součtem parametrů
dílčích procesů**

Analytický model přepojovací sítě

příklad: zpoždění paketů v přepojovacích sítích -
náhradní schéma přepojovacího uzlu:



předpoklad: do fronty VF_i
přichází λ_i paketů /sec
o délce: $f(l) = \nu e^{-\nu l} \Rightarrow$
 $F(l) = 1 - e^{-\nu l}$
 ν ...průměr. délka [paket / bit]

kapacita výstupní. linky:

C_i [bit / sec]

průměrná délka paketu:

$1 / \nu$ [bit / paket]

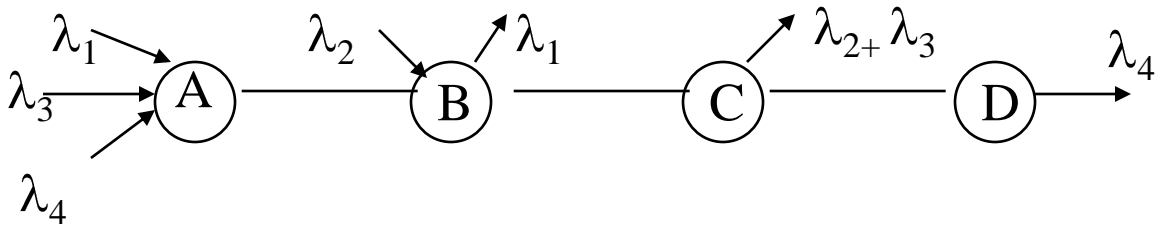
počet přenes. paketů výst. linkou [paket/sec]: $\mu_i = C_i / 1 / \nu = \nu C_i$

zpoždění paketu v uzlu i : $E(T_i) = 1 / (\mu_i - \lambda_i) = 1 / (\nu C_i - \lambda_i)$

Analytický model přepojovací sítě

Příklad 1: aplikace předchozích výsledků na výpočet zpoždění paketů v přepojovacích sítích; jsou dány přenosové kapacity a zátěže linek v síti.

Vypočtete: a) průměrné zpoždění paketů pro jednotlivé uzly,
 b) průměrné zpoždění paketů v uzlu (anonymní),
 c) průměrné zpoždění paketů v síti.

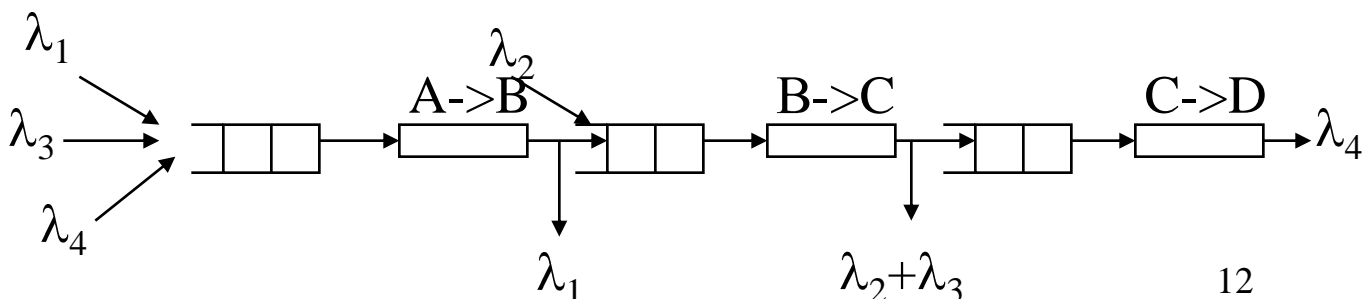


kapacita všech linek..... $C = 20\,000$ [bit/sec]

- zátěže: $\lambda_1 = A \rightarrow B$: 10 [paket/sec],
 $\lambda_2 = B \rightarrow C$: 10 [paket/sec],
 $\lambda_3 = A \rightarrow C$: 10 [paket/sec],
 $\lambda_4 = A \rightarrow D$: 10 [paket /sec]
- průměrná délka paketů = $1/\nu = 500$ [bit/paket]
 $\nu \cdot C = 1/500$ [paket / bit] $\cdot 20000$ [bit/sec] = 40 [paket / sec]

$$E(T) = \frac{1}{\nu \cdot C - \lambda_i} \quad \dots \text{střední hodnota doby čekání paketu ve výstupní frontě pro zátěž } \lambda_i$$

Schéma SHO & informační toky:



Analytický model přepojovací sítě

pokračování příkladu: výpočet zpoždění:

a) čekání ve frontách na konkrétní linky + doba vyslání

linka A->B: $E(T) = 1 / (40 - (10+10+10)) = 0.1 \text{ sec}$

linka B->C: $E(T) = 1 / (40 - (10+10+10)) = 0.1 \text{ sec}$

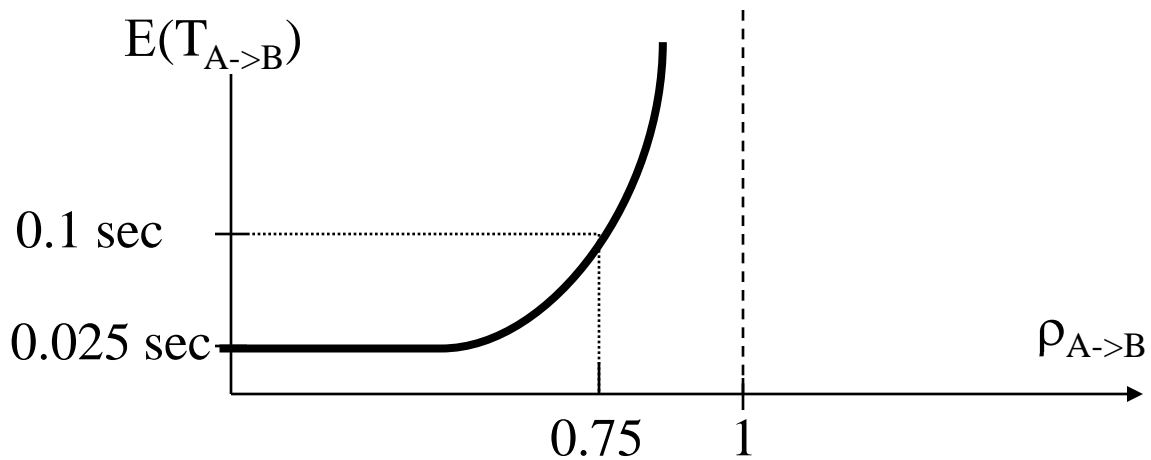
linka C->D: $E(T) = 1 / (40 - 10) = 0.03 \text{ sec}$

případ nezátížené sítě:

$$\lambda_i \ll \nu \cdot C \Rightarrow E(T) \cong \frac{1}{\nu \cdot C} = \frac{1}{40} = 0.025 \text{ sec/paket}$$

využití linky A->B:

$$\rho_{A \rightarrow B} = \frac{\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4}{\nu \cdot C} = \frac{30 \text{ paket/sec}}{40 \text{ paket/sec}} = 0.75$$



b) průměrné zpoždění rámce v anonymním uzlu:

suma zátěží na všech linkách : $\lambda = 70 \text{ paket/sec}$

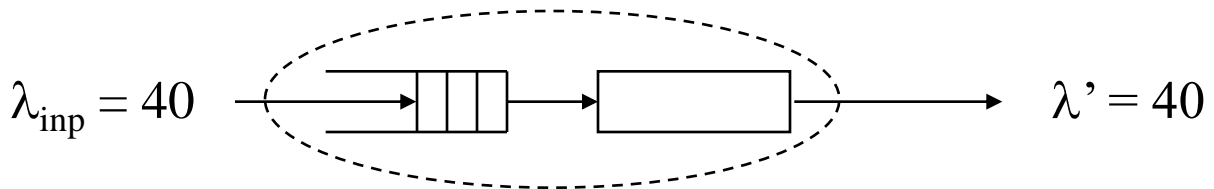
$$\begin{aligned} E(T) &= ((\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) / \lambda) \cdot 0.1 + \\ &\quad ((\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) / \lambda) \cdot 0.1 + \lambda_4 / \lambda \cdot 0.03 = \\ &= (30/70) \cdot 0.1 + (30/70) \cdot 0.1 + (10/70) \cdot 0.03 = 0.0903 \text{ sec} \end{aligned}$$

Analytický model přepojovací sítě

pokračování příkladu:

c) průměrné zpoždění rámce v síti = průměrné zpoždění rámců
v anonymním uzlu * průměrný počet uzlů na cestě =
= 0.0903 (1*1/2 + 2 1/4 + 3* 1/4) = 0.0903 * 1.75 = 0.158 sec

Jiný přístup: uvažujeme danou síť (tj. strukturu obslužných míst)
jako jediné obslužné místo



- použití Little-ova vzorce: $\lambda_{inp} \cdot E(T_q) = E(N_q)$

$E(N_q)$... průměrný počet rámců v síti,

$E(T_q)$... průměrné zpoždění rámce v síti,

$$E(N_q) = \sum_1^3 E(Nq_i) = \sum_1^3 \lambda_i' * E(Tq_i)$$

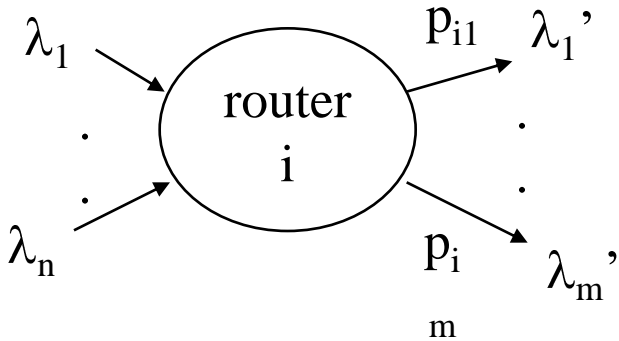
$$= 30 * 0.1 + 30 * 0.1 + 10 * 0.03 = 6.33 [frame]$$

$$E(T_q) = \frac{1}{\lambda_{inp}} * E(N_q) = \frac{6.33}{40} \cong 0.158 \text{ sec}$$

Note: $\lambda_1' = 10 + 10 + 10$, $\lambda_2' = 10 + 10 + 10$, $\lambda_3' = 10$,

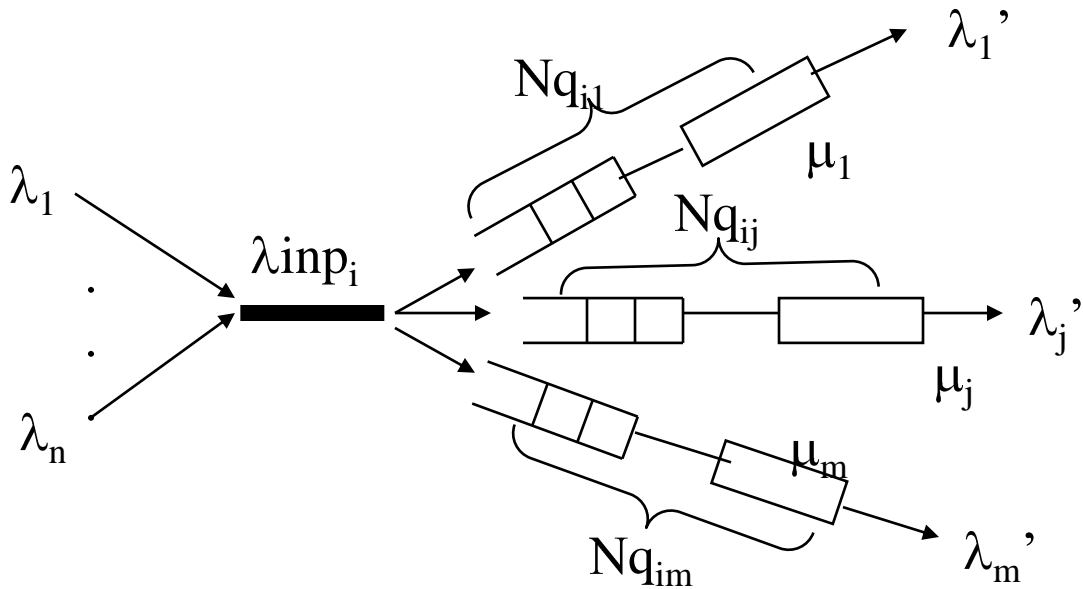
Analytický model přepojovací sítě

Náhodné přepojování:



p_{ij}pravděpodobnost směrování rámce do linky j

$\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1 \Rightarrow$ všechny rámce jsou směřovány do nějakého směru



Vstupní tok: $\lambda_{inp_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1' &= \lambda_{inp_i} \cdot p_{i1} \\ \lambda_m' &= \lambda_{inp_i} \cdot p_{im} \end{aligned} \right\} \text{zátěže výstupních linek}$$

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j' = \lambda_{inp_i} = \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

Analytický model přepojovací sítě

Dáno: μ_j ($j = 1..m$), λ_j' ($j=1...m$)

$E(Nq_i)=?$ průměrný počet rámců v uzlu i

$E(Tq_i)=?$ průměrné zpoždění rámce v uzlu i

$$E(Tq_{ij}) = \frac{1}{\mu_j - \lambda_j'} \quad \dots \text{průměrné zpoždění rámců v uzlu i, které jsou směřovány právě na linku j}$$

Průměrné zpoždění v uzlu i (bez ohledu na směr):

$$\begin{aligned} E(Tq_i) &= \sum_{j=1}^m E(Tq_{ij}) \cdot p_{ij} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\mu_j - \lambda_j'} \cdot p_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{\mu_j - \lambda_j'} \cdot \frac{\lambda_j'}{\lambda_{inpi}} \end{aligned}$$

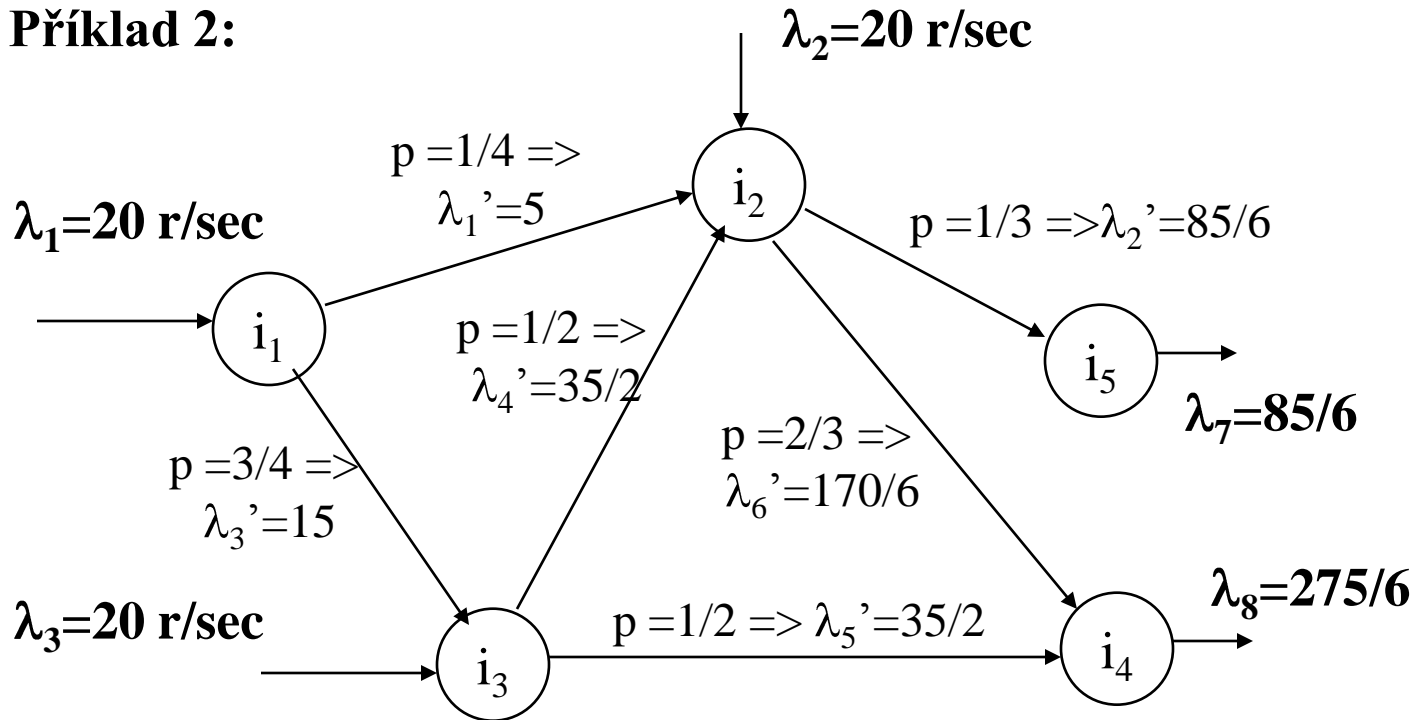
Jiný přístup: aplikace Little-ova vzorce na uzel i

$$\lambda_{inpi} \cdot E(Tq_i) = E(Nq_i) = \sum_{j=1}^m E(Nq_{ij}) \Rightarrow$$

$$E(Tq_i) = \frac{1}{\lambda_{inpi}} \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j'}{\mu_j - \lambda_j'}$$

Analytický model přepojovací sítě

Příklad 2:



$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 60 \text{ r/sec} = \lambda_7 + \lambda_8 = \lambda'$$

$$E(Tq_{15}) = \frac{1}{\mu_{12} - 5} + \frac{1}{\mu_{25} - \frac{85}{6}}$$

$$E(Tq_{1324}) = \frac{1}{\mu_{13} - 15} + \frac{1}{\mu_{32} - \frac{35}{2}} + \frac{1}{\mu_{24} - \frac{170}{6}}$$

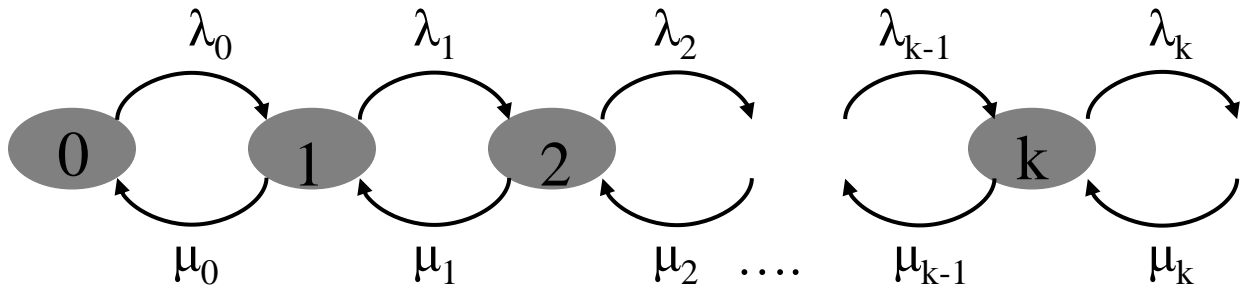
$$\mu = v \cdot C \text{ [rámec / sec]}$$

Průměrné zpoždění rámece na cestě uvnitř sítě (Littleův vzorec):

$$E(Tq) = \frac{1}{\lambda} \cdot E(Nq) = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{j=1}^5 \sum_{\substack{\text{všechny} \\ \text{výstupní} \\ \text{fronty} \\ \text{v uzlu } i}} \frac{\lambda'_j}{\mu - \lambda'_j}$$

Analytické modely se stavově závislými přechody

- zobecnění systému M/M/1/∞
- M/M/1/∞ (1 kanál, neomezená fronta)
- příchody a odchody jsou funkcí k (k..počet požadavků)



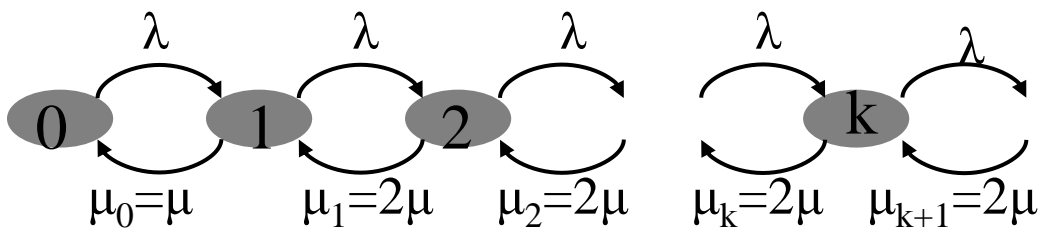
rovnováha pravděpodobností: platí $p_k \cdot \lambda_k = p_{k+1} \cdot \mu_{k+1} \Rightarrow$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot P_0$$

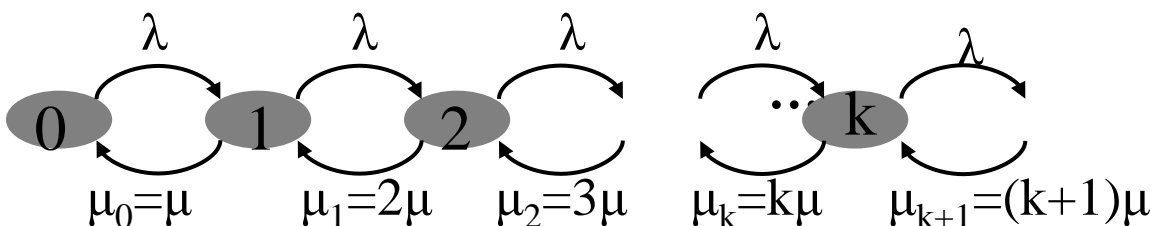
$$P_k = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{k-1}}{\mu_k \cdot \mu_{k-1} \cdot \dots \cdot \mu_1} \cdot P_0 = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^k \mu_i} \cdot P_0$$

Speciální případy:

- M/M/2/∞



- M/M/∞



Systém M / M / 2 / ∞

- $\lambda = \text{konst.}, \quad \mu_1 = \mu, \mu_2 = 2\mu, \mu_3 = 2\mu, \mu_4 = 2\mu, \dots$

$$P_k = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_k \dots \mu_2} \cdot P_0 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(2\mu)^{k-1}} P_0 =$$

$$= 2 \frac{\lambda^k}{(2\mu)^k} \cdot P_0 = 2 \cdot \rho^k \cdot P_0$$

$\rho = \lambda / 2\mu$ pro $k \geq 2, \quad p_0 = ?$

- nekonečná fronta:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + 2\rho P_0 + 2\rho^2 P_0 + 2\rho^3 P_0 + \dots = 1 \Rightarrow$$

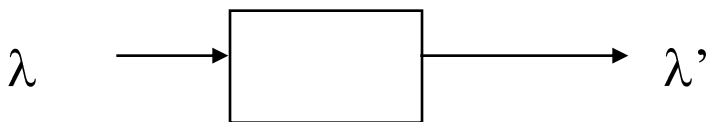
$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

$$E(N_q) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot 2\rho^k \cdot \frac{1 - \rho}{1 + \rho} =$$

$$= 2\rho \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \rho^{k-1} = \frac{2\rho}{(1 - \rho^2)}$$

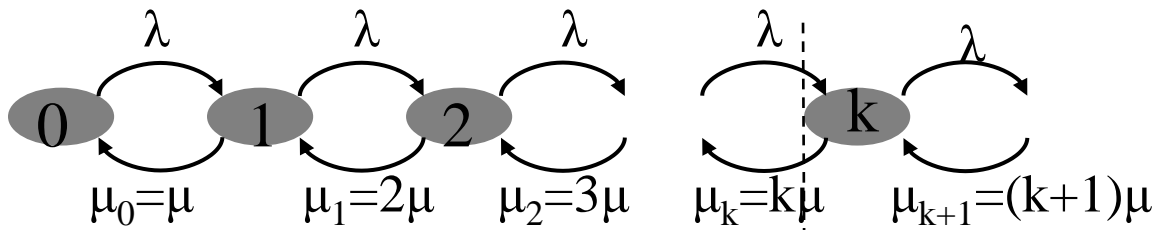
$$E(T_q) = \frac{1}{\lambda} E(N_q) = \frac{1}{\mu(1 - \rho^2)} \Rightarrow \mu \cdot E(T_q) = \frac{1}{1 - \rho^2}$$

Průměrná propustnost: $\lambda' = \mu \cdot p_1 + 2\mu(1 - p_0 - p_1) = \lambda$



System M / M / ∞ / ∞

- $\lambda = \text{konst.}, \mu = k \cdot \mu$



$$p_{k-1} \cdot \lambda = p_k \cdot k \cdot \mu \Rightarrow p_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{k-1} \Rightarrow$$

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \cdot p_0$$

$p_0 = ?$

žádná fronta \Rightarrow průměrná doba obsluhy = $1 / \mu$;

během tohoto intervalu $1 / \mu$: k nových příchoďů s pravděpodobnostmi:

$$p_k = \left(\frac{1}{\mu} \cdot \lambda\right)^k \cdot e^{-\frac{1}{\mu} \cdot \lambda} \cdot \frac{1}{k!} \quad \dots\dots\dots \text{Poissonovo rozložení}$$

$$\Rightarrow p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = e^{-\rho}$$

$$E(Nq) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \rho \quad \dots\dots \text{střední hodnota}$$

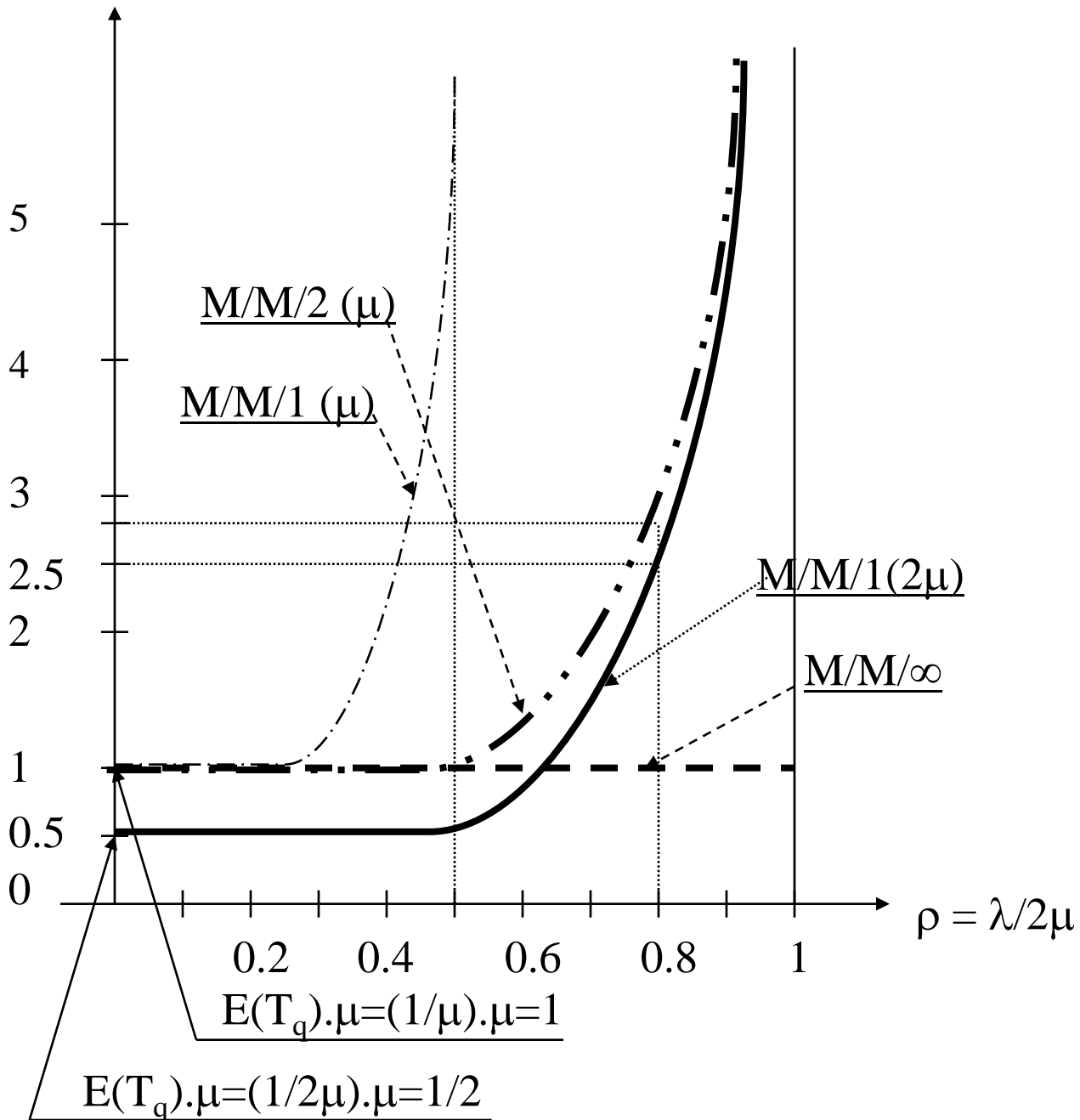
$$E(Tq) = E(Nq) \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \mu \cdot E(Tq) = 1$$

Průměrná průchodnost:

$$\lambda' = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mu \cdot p_k = \mu \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \mu \cdot \rho = \mu \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \lambda$$

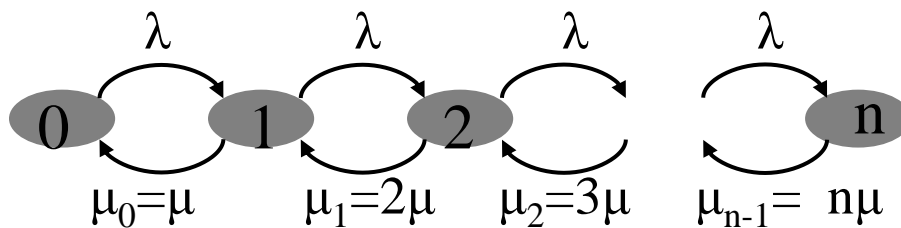
Srovnání analytických modelů

$\mu \cdot E(T_q)$ normované zpoždění



System M / M / c / d

- $c = n$ obslužných kanálů, délka fronty $d = n$
- speciální případ $M / M / \infty / \infty$



$$p_k = \rho^k \frac{1}{k!} p_0 \dots \text{viz předchozí příklad}$$

$$\sum_{i=0}^n \rho^i \frac{1}{i!} p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \rho^i \frac{1}{i!}} \Rightarrow p_k = \frac{\rho^k \frac{1}{k!}}{\sum_{i=0}^n \rho^i \frac{1}{i!}}$$

- nedochází - li k odmítání z důvodu plné fronty: chování stejné jako v případě $M / M / \infty \Rightarrow E(N_q) = \rho$

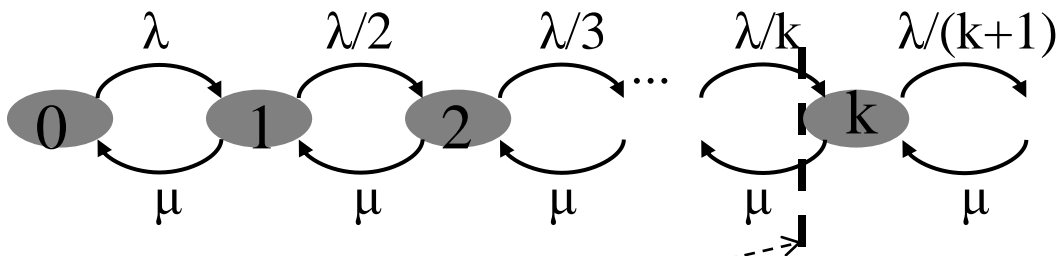
- pravděpodobnost blokování:
$$p_b = \frac{\rho \cdot \frac{1}{n!}}{\sum_{i=0}^n \rho^i \cdot \frac{1}{i!}}$$

$$E(N_q) = \rho \cdot (1 - p_b); \text{ průchodnost: } \lambda' = \lambda (1 - p_b)$$

$$E(T_q) = 1 / \lambda'. E(N_q) = [\rho \cdot (1 - p_b)] / [\lambda \cdot (1 - p_b)] = 1 / \mu$$

System M / M / 1 / ∞ s odmítáním

- vstupní tok požadavků je řízen: $\lambda_k = \lambda / (k+1)$, λ .. maximální zátěž
- $\mu = \text{konst.}$



$$p_{k-1} \cdot \frac{\lambda}{k} = p_k \cdot \mu \Rightarrow p_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{k-1} \Rightarrow$$

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \cdot p_0 \quad \dots \text{ viz systém M/M}/\infty$$

$$p_0 = e^{-\rho} \quad \dots \dots \text{ pro nekonečnou frontu}$$

$$E(N_q) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

viz. M / M / ∞

Poznámky:

- jde o Poissonovo rozložení se střední hodnotou ρ ,
- fronta je stabilní pro jakékoliv ρ ,
- průchodnost: $\lambda' = 0 \cdot p_0 + \mu (1 - p_0) = \underline{\mu \cdot (1 - e^{-\rho})}$
- normovaná průchodnost: $\lambda' / \mu = (1 - e^{-\rho})$
- zpoždění $E(T_q) = E(N_q) / \lambda' = \rho / \mu \cdot (1 - e^{-\rho})$
- normované zpoždění: $\mu \cdot E(T_q) = \rho / (1 - e^{-\rho})$

System M / G / 1 / ∞

- G.... délka obsluhy: libovolné, ale známé rozložení

$$E(N_q) = \frac{\rho}{1-\rho} \left[1 - \frac{\rho}{2} (1 - \mu^2 \sigma^2) \right]$$

jako M/M/1

korekční faktor : σ^2 ..rozptyl doby obsluhy

$$E(T_q) = \frac{E(N_q)}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1-\rho} \left[1 - \frac{\rho}{2} (1 - \mu^2 \sigma^2) \right]$$

Poznámky:

- pro M / M / 1: $\sigma^2 = 1 / \mu^2 \Rightarrow$ korekční faktor = 1,
- pro $\sigma^2 > 1 / \mu^2$ je $\sigma^2 \mu^2 > 1 \Rightarrow$ korekční faktor $> 1 \Rightarrow$
zvětšení fronty i doby čekání,
- pro $\sigma^2 < 1 / \mu^2$ je $\sigma^2 \mu^2 < 1 \Rightarrow$ korekční faktor $< 1 \Rightarrow$
zmenšení fronty i doby čekání,

System M / D / 1 / ∞

- D... konstantní délka obsluhy = $1 / \mu \Rightarrow \sigma^2 = 0$

$$E(N_q) = \frac{\rho}{1-\rho} \left[1 - \frac{\rho}{2} \right]$$

$$E(T_q) = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1-\rho} \left[1 - \frac{\rho}{2} \right]$$

Poznámky:

- pro ρ malé: výsledky jako M / M / 1,

- pro $\rho \rightarrow 1$:

$$E(N_q) = \frac{1}{2} \frac{\rho}{1-\rho} \qquad E(T_q) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \frac{1}{1-\rho}$$

