Metodika vyhodnocení výsledků simulace

- údaje odvozené od diskrétního času (discrete time data):
  př.: doba setrvání požadavku v systému (bodový odhad: průměr)
- údaje odvozené od spojitého času (continuous time data):
  př.: délka fronty (bodový odhad: vážený průměr)

Analýza výsledků : závisí na typu simulačního systému:

- systémy končící pravidelně (terminating systems):
  - známé počáteční podmínky i podmínky ukončení
  - analýza: zjednodušená metoda opakovaných simulačních běhů:

  příklad: pravidelné sledování délky fronty……získané vzorky uvnitř simulačního běhu nejsou nezávislé

  - nutnost více simulačních běhů (replikací),
  - simulační běh: provedení simulace, při kterém se „pozorování a vzorkování“ sledovaných hodnot provádí při „stejné konfiguraci modelu“ (tj. odvozené od týchž posloupností pseudonáhodných čísel),
  - simulační experiment: množina simulačních běhů, které reprezentují samostatné náhodné procesy .

- systémy nepřetržitě pracující (nonterminating systems):
  - složitější analýza, důvod : neznámé počáteční podmínky při startu simulace (nečinné kanály, prázdné fronty) => počáteční zkreslení (initialization bias) – nutnost eliminace,
  - cíl: nalézt ustálený stav,

Metodika vyhodnocení výsledků simulace

Předpoklady: uvažujeme nejjednodušší případ

- q_i (i = 1,2,…, n) **nezávislé vzorky** veličiny Q s **normál. rozložením**
- **σ^2 : známý rozptyl** náhodné veličiny Q,
- E(Q) = ?

Postup:

- výpočet střední hodnoty $$PR = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i$$
  …… odhad neznámé hodnoty E(Q)
- teorie pravděpodobnosti: PR_i …...hodnota náhodné veličiny PR s normálním rozložením a s parametry:
  - střední hodnota E (PR) = E (Q),
  - rozptyl S^2 (PR) = (1 / n) * σ^2
  - veličina $z = \dfrac{PR - E(Q)}{\sigma / \sqrt{n}}$ má normované normální. rozložení N(0,1),
  - nechť $z_{\alpha/2}$ je $\alpha/2$ kvantil rozložení N (0,1), tedy $P[\, -z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}\,] = 1 - \alpha$,
  - po dosazení za z a po úpravách dostaneme:

$$P\,[PR - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E(Q) \leq PR + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,] \cong 1-\alpha$$

$$P\,[\,|\,chyba| \leq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,] \cong 1-\alpha$$

Obecný závěr: lze určit mez, kterou absolutní hodnota chyby s určitou pravděpodobností (tj. 1-α) nepřekročí; tuto mez lze stanovit až po provedení všech „pokusů“

Statistika nezávislých hodnot

Předpoklady:

- vzorky y_i sledované veličiny Y jsou **nezávislé** (pokud pochází z jiného rozložení než normálního rozložení, pak požadujeme n >30),
- rozložení veličiny Y má stacionární charakter,
- 2 způsoby vyhodnocení:

1) je **známá hodnota rozptylu σ^2 hodnot y_i** : viz předchozí slide: odhad intervalu spolehlivosti na základě normálního rozložení,

2) **hodnota rozptylu σ^2 není známá** (obvyklý případ) :

- výběrový průměr (přibližně normál. rozložení):

$$PR = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

- výběrový rozptyl (odhad rozptylu) :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}(y_i - PR)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i-1}^{n} y_i^2 - n.PR^2\right)$$

- odhad intervalu spolehlivosti (pro výběrový průměr)

$$\left(PR - \frac{S}{\sqrt{n}}.t_{\alpha/2,n-1} \ , \ PR + \frac{S}{\sqrt{n}}.t_{\alpha/2,n-1} \right)$$

jde o statistiku $\dfrac{PR - E(y_i)}{S/\sqrt{n}}$, která má t rozdělení

- t : t - rozdělení (Studentovo) s n-1 stupni volnosti
- $t_{\alpha/2,n-1}$: α/2 kvantil t rozložení s n-1 stupni volnosti
- pravděpodobnost správného odhadu: 1-α

.

Vliv vzájemné korelace na odhad přesnosti

- odhady přesnosti značně komplikuje skutečnost, kdy sledované hodnoty nejsou nezávislé
- předpoklad: kovariance mezi stejně vzdálenými hodnotami ve výsledné náhodné posloupnosti je stacionární
- autokorelační koeficient (mezi hodnotami navzájem vzdálenými o k)

$$\rho_k = \frac{\operatorname{cov}(y_i, y_{i+k})}{\sigma^2} = \frac{E((y_i - PR)(y_{i+k} - PR))}{\sigma^2}$$

- rozptyl závisí na hodnotách koeficientů ρ_k a je dán složitějším vzorcem než v případě nezávislých hodnot

$$\operatorname{var}(y_i) = \frac{\sigma^2}{n} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \rho_k \right]$$

- pokud $\rho_k = 0$, pak var (y_i) = σ^2 / n …. jde o nezávislé hodnoty,
- pokud $\rho_k > 0$, pak jde o pozitivní korelaci a rozptyl dosahuje větších hodnot než při odhadu nezávislých hodnot; tento případ je typický pro fronty => hrozí nebezpečí značného přecenění přesnosti
- pokud $\rho_k < 0$, pak jde o negativní korelaci a rozptyl dosahuje menších hodnot než při odhadu nezávislých hodnot
- snaha uspořádat výpočet tak, aby bylo možné použít statistiky vypracované pro nezávislé hodnoty

Metoda nezávislých simulačních běhů

cíl: získání nezávislých vzorků + eliminace počátečního zkreslení:
(inteligentní odhad, případně ignorování počátečních vzorků)

Postup:

- shromáždění n vzorků z jednoho simulačního běhu,
- provedení r replikací simulačních běhů (doporučeno r =10 až 25) ,
- ignorování d vzorků z každé replikace (doporučeno n - d > 10 d) :

	1	..	d	..	i	..	..	n	
1	y_{11}	..	..	..	y_{i1}	..	..	y_{n1}	$PR_1(n,d)$
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
j	y_{1j}	..	..	..	y_{ij}	..	..	..	$PR_j(n,d$
r	y_{1r}	..	..	..	y_{ir}			y_{nr}	$PR_r(n,d)$
	zahozené vzorky			uvažované vzorky					

- odhad po i-té replikaci: $$PR_j(n,d) = \frac{1}{n-d}\sum_{i=d+1}^{n} y_{ij}$$

- výsledný odhad: $$PR = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} PR_j\,(n-d)$$

- interval spolehlivosti:

$$S^2 = \frac{1}{r-1}\left(\sum_{j=1}^{r} PR_j(n,d)^2 - r\,.\,PR^2\right)$$

$$\left(PR - t_{\alpha/2,\, r-1}\ .\ \frac{S}{\sqrt{r}}\ ,\quad PR + t_{\alpha/2,\, r-1}\ .\ \frac{S}{\sqrt{r}} \right)$$

Metoda nezávislých simulačních běhů

Příklad:

• uvažujme výsledky PR_i 10 – ti simulačních běhů:

PR_1	PR_2	PR_3	PR_4	PR_5	PR_6	PR_7	PR_8	PR_9	PR_{10}
3.25	17.83	15.43	7.71	3.11	4.91	9.45	5.27	6.24	11.83

• vypočtené výsledné statistiky z 10 – ti replikací :

$PR = 8.43$, $S^2 = 25.30$, $S = 5.03$,

• interval spolehlivosti (pro $\alpha = 0.05$ $t_{\alpha/2\,,\,9} = 2.26$):

$$PR \geq 8.43 - (5.3 / \sqrt{10}) \,.\, 2.26 = 4.84$$

$$PR \leq 8.43 + (5.3 / \sqrt{10}) \,.\, 2.26 = 12.02$$

Možnosti pro zlepšení přesnosti:

1) zvýšení počtu simulačních běhů:

požadavek: interval spolehlivosti: ($PR - \epsilon$, $PR + \epsilon$) s $\alpha = 0.9$

$|\,\text{chyba}\,| = t_{\alpha/2\,,\,r-1}\; S_0 / \sqrt{r} \leq \epsilon$, $r = ?$

dáno: předchozí počet simulačních běhů: r_0, vypočtená hodnota S_0

$$r \geq \left(\frac{t_{\alpha/2,\,r-1} \,.\, S_0}{\varepsilon} \right)^2 , \quad r \geq r_0 \qquad [1]$$

• neznáme r, pro odhad hodnoty $t_{\alpha/2,\; r-1}$ použijeme $z_{\alpha/2}$ (z normálního rozložení),

• ale: $z_{\alpha/2} \leq t_{\alpha/2,\; r-1}$ (pro $r \geq 50$ $z_{\alpha/2} \approx t_{\alpha/2,\; r-1}$),

takto získanou hodnotu r znovu zkontrolujeme dle vztahu [1], pokud nevyhovuje, pak postup opakujeme

Metoda nezávislých simulačních běhů

Příklad: upřesnění výsledků z předešlého příkladu:

předpoklad: $r_0 = 10$, $S_0 = 5.03$, $\alpha = 0.9$; požadavek: $\epsilon = 2$

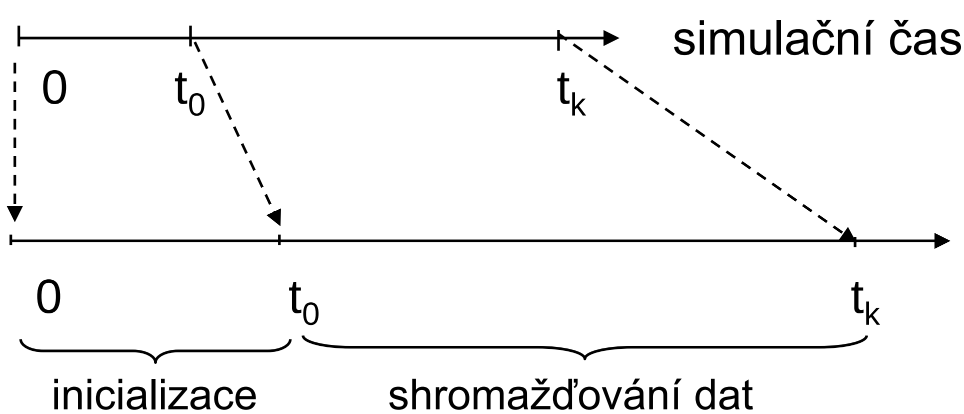
- odhad r : $r \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot S_0^{\,2}}{2} \right)^2 = 17.1 \Rightarrow r = 18$,
- kontrola dle [1]:

	hodnota $t_{0.05,\,r}$	hodnota $\left(\frac{t_{\alpha/2,\,r-1} \cdot S_0}{2} \right)^2$
r = 18	1.74	19.15
r = 19	1.73	18.93

=> **r = 19** (r > 18.93)

2) prodloužení jednotlivých simulačních běhů

– v poměru r / r_0 :



• výhoda: lepší eliminace počátečního zkreslení

• nevýhoda: nutnost opakovat nebo navazovat na stav systému v čase t_k

Metoda jednoho simulačního běhu

- „ batch means“
- výhoda: jediná eliminace chybných počátečních podmínek,
- nevýhoda: složitější odhad chyby střední hodnoty

<u>Postup:</u>

1) získání n hodnot a ignorování d prvých hodnot : n - d > 10 d ,
2) rozdělení simulačního běhu do k dávek (batches): $100 \leq k \leq 400$,
3) výpočet průměrných hodnot PR_i z jednotlivých dávek a výpočet celkového průměru PR,
4) výpočet korelace mezi vypočtenými hodnotami PR_i :

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (PR_i - PR)(PR_{i+1} - PR)}{\sum_{i=1}^{k} (PR_i - PR)^2}$$

pokud hodnota koeficientu $\rho \leq 0.2$, pak ze shromážděných hodnot vytvoř r dávek ($30 \leq r \leq 40$) a vypočti interval spolehlivosti

$$\left(PR - t_{\alpha/2,\, r-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{r}} \quad , \quad PR + t_{\alpha/2,\, r-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{r}} \right)$$

kde hodnota S je vypočtena z průměrů nyní vytvořených dávek

5) pokud hodnota koeficientu $\rho > 0.2$, pak rozšiř původní množinu hodnot o 50% až 100% (prodloužením simulačního běhu) a opakuj postup od bodu 4) .